Abstract. In this seminar we illustrate some recent joint results with C. Pérez and R.L. Wheeden on the self-improving property of generalized Poincaré inequalities.

Riassunto. In questo seminario presentiamo alcuni risultati ottenuti recentemente in collaborazione con C. Pérez e R.L. Wheeden sulla proprietà di self-improving di certe disuguaglianze di Poincaré generalizzate.

In questo seminario intendo presentare alcuni risultati recenti ottenuti in collaborazione con C. Pérez e R.L. Wheeden ([5]).

È ben noto che disuguaglianze di Poincaré–Sobolev nello spazio euclideo posso essere ottenute da disuguaglianze $L^p - L^q$ per integrali frazionari di Riesz. Per esempio, la stima classica

$$(1) \qquad \left(\int_B |f(x) - f_B|^q \, dx\right)^{1/q} \leq c \left(\int_B |\nabla f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad 1 < p < n,$$

dove B è una sfera Euclidea in $\mathbb{R}^n$ e $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) \, dx$, può essere ottenuta dalla stima integrale

$$(2) \qquad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_1 f(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

per gli stessi valori di p e q, dove c è indipendente da f e

$$I_1 f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} \, dy$$

è la trasformata di Riesz di f di ordine 1. Analogamente, benchè (2) sia falsa per $p = 1$ e $q = n/(n-1)$, il caso $p = 1$ di (1) può essere ottenuto dalla seguente stima di tipo debole analoga a (2):

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^n : |I_1 f(x)| > \lambda\} \right|^{(n-1)/n} \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \lambda > 0,$$

con c indipendente da λ e f, dove $|E|$ denota la misura di Lebesgue dell'insieme E.

La formula di rappresentazione puntuale

$$|f(x) - f_B| \leq c \, I_1(|\nabla f| \chi_B)(x), \quad x \in B,$$

con c indipendente da x, B e f, chiarisce come (1) segua da (2) se $p > 1$, e un argomento molto più sofisticato basato sulle proprietà dei troncamenti può essere usato quando $p = 1$ (si vedano [7], [13]).

Recentemente, stime forti per per trasformazioni integrali più generali sono state usate per ottenere stime di Poincaré–Sobolev per campi vettoriali e per situazioni molto più generali, come varietà, gruppi o spazi metrici nel senso di [1]. Per esempio, sia $\rho(x, y)$ una metrica in $\mathbb{R}^n$ indotta da una famiglia X di campi vettoriali di Carnot–Carathéodory, e supponiamo che la misura di Lebesgue sia doubling per le ρ-sfere, cioè che $|B(x, 2r)| \leq C|B(x, r)|$ con C indipendente da x e r, dove $B(x, r)$ denota la ρ-sfera di centro x e raggio r. Allora l'operatore

$$I(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\rho(x, y)}{|B(x, \rho(x, y))|} \, dy$$

mappa L^p in L^q con p, q legate in termini della proprietà di doubling, e queste stime portano a disuguaglianze di Poincaré–Sobolev della forma

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^q \, dx\right)^{1/q} \leq c \, r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |Xf(x)|^p \, dx\right)^{1/p},$$

dove $r(B)$ è il raggio della ρ-sfera B. La ragione per cui la disuguaglianza di Poincaré–Sobolev segue è che esiste una rappresentazionte integrale della forma

$$(3) \qquad |f(x) - f_B| \leq c \, I(|Xf| \chi_B)(x), \quad x \in B,$$

con c indipendente da x, B e f; si veda ad esempio [2], [3], [8] per la formula di rappresentazione, e, ad esempio, [13] per le proprietà di continuità dell'operatore I.

D'altra parte, partendo dal lavoro di Saloff-Coste [12], è noto che le stime di Poincaré–Sobolev hanno una natura self-improving, nel senso che è possibile stime per p, q generali da casi particolari come

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|\,dx \le c\,r(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Xf|^{p_0}\,dx\right)^{1/p_0} \tag{4}$$

per qualche p_0, senza un esplicito uso di alcun operatore integrale.

Una spiegazione parziale di questo fenomeno e del ruolo di un operatore integrale nelle tecniche di self-improving è data in [2] e con costanti sharp in [9] (si vedano anche [3], [8], [10], [11]). Viene infatti provato che nel caso $p_0 = 1$, (4) è equivalente a (3). In particolare, assumendo (4) con $p_0 = 1$, abbiamo anche (3), e stime di Poincaré–Sobolev più generali con misure diverse seguono dalle stime corrispondenti per l'operatore integrale I.

. Tuttavia, nel caso $p_0 > 1$, non si conosce una rappresentazione precisa come (3) che segua da (4). Quando $p_0 > 1$, la difficoltà che si incontra cercando di adattare gli argomenti che portano da (4) a (3) nel caso $p_0 = 1$ è legata alla presenza dell'esponente $1/p_0$: il funzionale $a(B)$ definito da

$$a(B) = r(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |g|^{p_0}\,dx\right)^{1/p_0} \qquad (g \text{ e } p_0 \text{ fissati})$$

non è facile a sommarsi catene di sfere B anche se disgiunte quando $p_0 > 1$. Così, partendo da una stima del tipo

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\,dx \le c\,a(B)$$

per tutte le sfere B con $a(B)$ come sopra e $p_0 > 1$, o anche con funzionali $a(B)$ più generali, non è chiaro come costruire un operatore integrale le cui stime di tipo forte implichino stime di Poincaré–Sobolev migliorate come

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|^q\,dx\right)^{1/q} \le C\,a(B) \quad \text{for some } q > 1.$$

Il risultato principale che intendo illustrare mostra che il ruolo rappresentato usualmente dagli operatori integrali è rappresentato in generale da operatori somma $T(x)$ ottenuto sommando $a(B)$ su una opportuna catena di sfere associata a un punto x:

$$T(x) = \sum_{B \text{ è una catena per } x} a(B).$$

Nel caso $p_0 = 1$, l'operatore di somma diviene un operatore integrale, ma, in generale, le proprietà di continuità forte da L^p a L^q possono essere ottenute in modo analogo a quello utilizzato per operatori integrali, portando a corrispondenti stime di Poincaré–Sobolev .

In particolare, si ottengono stime di Poincaré–Sobolev per operatori $a(B)$ del tipo

$$a(B) = r(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Xf|^{p_0}\,dx\right)^{1/p_0}.$$

Si vedano anche [14] e [6]per tipi differenti di operatori somma.

Nel seguito $(\mathcal{S}, \rho)$ sarà uno spazio quasimetrico fornito di una misura di Borel doubling μ che rende $(\mathcal{S}, \rho, \mu)$ uno *spazio quasimetrico di tipo omogeneo* nel senso che

(i) $\rho(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$, e $\rho(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$;
(iii) $\rho(x,y) \leq K[\rho(x,z) + \rho(z,y)]$ per ogni $x, y, z \in \mathcal{S}$.

Se $x \in \mathcal{S}$ e $r > 0$, sia $B(x,r)$ la ρ-sfera centrata in x di raggio r, cioè $B(x,r) = \{y \in \mathcal{S} : \rho(x,y) < r\}$. Se B è una ρ-sfera, diremo B semplicemente 'una sfera', $r(B)$ sarà il suo raggio e la sua μ-misura sarà indicata con $|B|_\mu$. Inoltre, se $c > 0$, denoteremo con cB la sfera con lo stesso centro di B e con $r(cB) = cr(B)$.

Assumeremo sempre che μ abbia la *doubling property* seguente:

(iv) Esiste $A > 0$ tale che

$$|B(x, 2r)|_\mu \leq A\,|B(x,r)|_\mu$$

per ogni $x \in \mathcal{S}$ e r.

Definition 0.1. Diremo che una misura di Borel localmente finita ω appartiene alla classe $D = D(\mathcal{S}, \rho)$ se esiste una costante $A_\omega > 1$ tale che ω

$$|B(x,2r)|_\omega \leq A_\omega\,|B(x,r)|_\omega \tag{5}$$

per ogni $x \in \mathcal{S}$ e $r > 0$, dove $|E|_\omega = \int_E d\omega$ per ogni insieme misurabile E. Se ω è μ-assolutamente continua, cioè se $d\omega = w\,d\mu$ per una funzione $w \in L_{loc}(d\mu)$ nonnegativa, scriviamo $|E|_\omega = |E|_{wd\mu}$ e chiamiamo w una funzione peso.

IPOTESI GEOMETRICHE: Sia B_0 una sfera fissata in $(\mathcal{S}, \rho)$. Supponiamo che per ogni $x \in B_0$ esista una catena di sfere $\{B_j\} = \{B_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ che soddisfa

(H1) $B_j \subset B_0$ per ogni $j \geq 0$;
(H2) $r(B_j) \approx 2^{-j} r(B_0)$ per ogni $j \geq 0$;
(H3) $\rho(B_j, x) \leq cr(B_j)$ per ogni $j \geq 0$,

dove $\rho(B_j, x)$ denota la distanza di x da B_j, e assumiamo che le costanti in (H2) e (H3) siano indipendenti da x e j. Notiamo che le sfere $B_j(x)$ possono contenere o no x, ma la successione $\{B_j(x)\}$ dipende x.

Segue da (H2), (H3) e (iii) che

(H4) Se $j < k$ allora $B_k \subset CB_j$, dove C è una costante geometrica.

Remark 0.2. Sappiamo da [8] e [3]che una catena soddisfacente (H1)–(H3), e quindi anche (H4), esiste in ogni spazio metrico che soddisfa la *proprietà del segmento*,cioè in spazi metrici tali che per ogni coppia di punti $x, y \in \mathcal{S}$ esiste una curva continua $\gamma : [0,T] \to \mathcal{S}$ che congiunge x e y tale che $\rho(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ per ogni $s, t \in [0,T]$. Tale catena ha anche la proprietà ulteriore

(H5) Per ogni $j \geq 0$, $B_j \cap B_{j+1}$ contiene una sfera S_j con $r(S_j) \approx r(B_j)$;
(H6) $\rho(B_j, x) \approx r(B_j)$ per ogni $j \geq 0$;
(H7) $\{B_j\}$ hanno sovrapposizioni limitate.

Tipicamente, le metriche di Carnot–Carathéodory e le metriche Riemannianiane godono della proprietà del segmento.

Definition 0.3. Sia $a : B \to a(B)$ un funzionale non negativo definito sulle sfere $B \subset B_0$. Se $x \in B_0$, sia

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a(B_j(x)), \tag{6}$$

dove $\{B_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ è una successione di sfere che soddisfano (H1), (H2), e (H3), e $B_0(x) = B_0$ per ogni $x \in B_0$.

Diremo $T(x)$ un operatore somma associato al funzionale $a(B)$.
Il significato di $T(x)$ sta nella seguente formula di rappresentazione puntuale.

Theorem 0.4. *Supponiamo che valgano (H1)-(H3) e (H5). Sia $f \in L^1(B_0, \mu)$ tale che per ogni sfera $B \subset B_0$,*

$$\frac{1}{|B|_\mu}\int_B |f - f_B|\, d\mu \le c\, a(B), \tag{7}$$

dove $f_B = \frac{1}{|B|_\mu}\int_B f\, d\mu$. Allora per μ-q.o. $x \in B_0$

$$|f(x) - f_{B_0}| \le C\, T(x), \tag{8}$$

dove C è una costante geometrica che dipende anche dalla costante di (7).

Possiamo ora enunciare il nostro risultato principale, una stima debole per l'operatore T.

Theorem 0.5. *Sia $0 < q < \infty$ e $\omega \in D$. Supponiamo valgano (H1)-(H3), ed esistano due costanti positive θ e c tali che $\theta < 1$ e*

$$\sum_j \{a(Q_j)^q\, |Q_j|_\omega\}^\theta \le c\, \{a(B_0)^q\, |B_0|_\omega\}^\theta \tag{9}$$

per tutte le famiglie $\{Q_j\}$ di sottosfere disgiunte di B_0. Allora

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in B_0 : \ T(x) > \lambda\}|_\omega^{1/q} \le C\, a(B_0)\, |B_0|_\omega^{1/q}, \tag{10}$$

dove C è una costante geometrica che dipende anche dalla costante di (9).

Come conseguenza dei Teoremi 0.4 e 0.5, possiamo ottenere il seguente risultato di self-improvind di tipo debole per la disuguaglianza di Poincaré–Sobolev in B_0.

Theorem 0.6. *Supponiamo valgano (H1)-(H3) e (H5). Supponiamo anche $\omega \in D$ e che valga (9) per qualche $\theta < 1$ e $1 < q < \infty$. Se f una funzione reale di Borel in B_0 che soddisfa*

$$\frac{1}{|B|_\mu}\int_B |f - c_B|\, d\mu \le c\, a(B) \tag{11}$$

per ogni sfera $B \subset B_0$, dove c_B è un numero reale dipendente da B e f, allora

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in B_0 : \ |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\}|_\omega^{1/q} \le C\, a(B_0)\, |B_0|_\omega^{1/q}, \tag{12}$$

dove $f_{B_0} = \frac{1}{|B_0|_\mu}\int_{B_0} f\, d\mu$ e C è una costante geometrica che dipende anche dalle costanti di (9) r (11).

Corollary 0.7. *Siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 0.6, inclusa (9) per qualche $\theta < 1$ e $\omega \in D$. Allora, se $0 < r < q$,*

$$\left(\frac{1}{|B_0|_\omega}\int_{B_0} |f - f_{B_0}|^r\, d\omega\right)^{1/r} \le c\, a(B_0), \tag{13}$$

dove c è una costante geometrica dipendente anche da r, q.

Proposition 0.8. *Siano ν e ω misure di Borel in B_0. Dati p e una funzione g tale che $0 < p < \infty$, $g \in L^p(B_0, d\nu)$ e $g \geq 0$, poniamo*

$$a(B) = r(B)\left(\frac{1}{|B|_\nu}\int_B g^p\,d\nu\right)^{1/p}. \tag{14}$$

Se la condizione di 'balance'

$$\frac{r(B)}{r(B_0)}\left(\frac{|B|_\omega}{|B_0|_\omega}\right)^{1/q} \leq c\left(\frac{|B|_\nu}{|B_0|_\nu}\right)^{1/p} \tag{15}$$

vale per qualche q e per ogni $B \subset B_0$, allora vale (9) con $\theta = p/q$ per (14).

In particolare se $\omega = \mu$ and $\nu = \mu$, la condizione di balance (15) si riduce a una condizione di doubling $\mu \in D_N, N = (1/p - 1/q)^{-1}$.

Combinando il Corollario 0.7 e la Proposizione 0.8, otteniamo immediatamente il risultato seguente di self-improving.

Corollary 0.9. *Supponiamo valgano (H1)-(H3) e (H5), $\omega \in D(S, \rho)$, e f sia una funzione di Borel reale in B_0. Sia ν una misura di Borel in S tale che la condizione di balance (15) valga per qualche coppia p, q con $0 < p < q$, e r soddisfi $0 < r < q$. Se esiste $g \geq 0$ tale che per ogni sfera $B \subset B_0$ esista $c_B \in \mathbb{R}$ con*

$$\frac{1}{|B|_\mu}\int_B |f - c_B|\,d\mu \leq c\,r(B)\left(\frac{1}{|B|_\nu}\int_B g^p\,d\nu\right)^{1/p}, \tag{16}$$

allora

$$\left(\frac{1}{|B_0|_\omega}\int_{B_0} |f - f_{B_0}|^r\,d\omega\right)^{1/r} \leq c\,r(B_0)\left(\frac{1}{|B_0|_\nu}\int_{B_0} g^p\,d\nu\right)^{1/p}. \tag{17}$$

Nel caso particolare di metriche di Carnot–Carathéodory il risultato precedente può essere migliorato con $r = q$.

Corollary 0.10. *Siano μ e ν misure di Borel doubling in $(\mathbb{R}^n, \rho)$, $p_0 > 0$ e X sia un operatore differenziale tale che*

$$\frac{1}{|B|_\mu}\int_B |f - f_B|\,d\mu \leq C\,r(B)\left(\frac{1}{|B|_\nu}\int_B |Xf|^{p_0}\,d\nu\right)^{1/p_0} \tag{18}$$

per tutte le sfere B e per tutte le funzioni lipschitziane f. Sia $p_0 \leq p < q < \infty$, e assumiamo che $\omega \in D$, $v \in A_{p/p_0}(\nu)$, e che :

$$\frac{r(\tilde{B})}{r(B)}\left(\frac{|\tilde{B}|_\omega}{|B|_\omega}\right)^{1/q} \leq C\left(\frac{|\tilde{B}|_{vd\nu}}{|B|_{vd\nu}}\right)^{1/p} \tag{19}$$

per tutte le sfere $\tilde{B}, B$ tali che $\tilde{B} \subset B$. Allora

$$\left(\frac{1}{|B|_\omega}\int_B |f - f_B|^q\,d\omega\right)^{1/q} \leq C\,r(B)\left(\frac{1}{|B|_{vd\nu}}\int_B |Xf|^p\,v\,d\nu\right)^{1/p} \tag{20}$$

con C indipendente da f e B.

References

[1] R. R. Coifman & G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Math., Vol. 242, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1971.

[2] B. Franchi, G. Lu & R. L. Wheeden, *A relationship between Poincaré type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type*, Internat. Math. Res. Notices (1996), 1–14.

[3] B. Franchi & R. L. Wheeden, *Some remarks about Poincaré type inequalities and representation formulas in metric spaces of homogeneous type*, J. Inequalities and Applications 3 (1999), 65–89.

[4] B. Franchi, C. Pérez & R. L. Wheeden, *Self-improving properties of John–Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Functional Analysis 153 (1998), 108–146.

[5] B. Franchi, C. Pérez & R. L. Wheeden, *A sum operator with applications to self-improving properties of Poincaré inequalities in metric spaces*, J. Fourier Anal. Appl., in corso di stampa.

[6] P. Hajłasz & P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc. 688 (2000).

[7] R. Long & F. Nie, *Weighted Sobolev inequality and eigenvalue estimates of Schrödinger operators*, Harmonic Analysis (Tianjin, 1988). Lect. Notes Math. 1494, Springer, 1991.

[8] G. Lu & R. L. Wheeden, *High order representation formulas and embedding theorems on stratified groups and generalizations*, Studia Math. 142 (2000), 101–133.

[9] P. MacManus & C.Pérez, *Generalized Poincaré inequalities: Sharp self-improving properties*, Internat. Math. Res. Notices 2 (1998), 101–116.

[10] P. MacManus & C. Pérez, *Trudinger's inequality without derivatives*, appeared electronically in Trans. Amer. Math. Soc., January, 2002.

[11] J. Orobitg & C. Pérez, *A_p weights for nondoubling measures in R^n and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[12] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices 2 (1992), 27–38.

[13] E. Sawyer & R. L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces*, Amer. J. Math. 114 (1992), 813–874.

[14] I. E. Verbitsky & R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for integral operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 3371–3391.